

# Ecricome 2010

## Exercice 1

### Partie I

1. Le réel  $\lambda$  est une valeur propre de  $f_a$  si et seulement si la matrice  $M_a - \lambda I_3$  est **non inversible** avec :

$$M_a - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} (a+2) - \lambda & -(2a+1) & a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Déterminons une **réduite de Gauss** de  $M_a - \lambda I_3$ .

$$\begin{aligned} M_a - \lambda I_3 &= \begin{bmatrix} (a+2) - \lambda & -(2a+1) & a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} & L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ (a+2) - \lambda & -(2a+1) & a \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} & L_2 \leftarrow ((a+2) - \lambda)L_1 - L_2 \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2a - 2\lambda - a\lambda + \lambda^2 + 1 & -a \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} & L_3 \longleftrightarrow L_2 \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2a - 2\lambda - a\lambda + \lambda^2 + 1 & -a \end{bmatrix} & L_3 \leftarrow (2a - 2\lambda - a\lambda + \lambda^2 + 1)L_2 - L_3 \\ \sim & \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \underbrace{-\lambda^3 + (a+2)\lambda^2 - (2a+1)\lambda + a}_{-Q(\lambda)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

La matrice  $M_a - \lambda I_3$  n'est pas inversible si, et seulement si  $\lambda$  est racine du polynôme  $Q$

2. Sans commentaire particulier :

$$Q(1) = 0$$

3. Le résultat de la question précédente nous permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ &= (x-1)(x^2 + \beta x + a) \end{aligned}$$

Le coefficient de  $x^2$  égal à  $\beta - 1$  s'identifie donc à  $-(a+2)$  d'où  $\beta = -a - 1$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-1)(x^2 - (a+1)x + a) \\ &= (x-1)(x-1)(x-a) \\ &= (x-1)^2(x-a) \end{aligned}$$

En conclusion :

$Q$  admet une racine simple égale à  $a$  et racine double égale à 1

4. Lorsque  $a = 1$ , l'endomorphisme  $f_1$  n'admet qu'une seule valeur propre égale à 1, mais comme la matrice canoniquement associée de  $f_1$  est  $M_1$ , **différente de la matrice identité**, on peut donc conclure que :

L'endomorphisme  $f_1$  n'est pas diagonalisable

**Partie II**

1. Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0$ . Cette relation équivaut aux systèmes linéaires équivalents suivants :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha a^2 + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha a + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \alpha (a - 1)^2 = 0 \\ \alpha (a - 1) + \gamma = 0 \\ \alpha = -\beta \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La combinaison linéaire nulle  $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0$  entraîne que  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ . La famille  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est libre et constituée de **trois** vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui est de dimension **trois**, ainsi :

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } E}$$

2. Tout d'abord le vecteur  $e'_1$  est **non nul** et vérifie :

$$\begin{aligned} f_a(e'_1) &= a^2 f_a(e_1) + a f_a(e_2) + f_a(e_3) \\ &= a^2((a+2)e_1 + e_2) + a(-(2a+1)e_1 + e_3) + ae_1 \\ &= (a^2(a+2) - a(2a+1) + a)e_1 + a^2e_2 + ae_3 \\ &= a^3e_1 + a^2e_2 + ae_3 \\ &= ae'_1 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{e'_1 \text{ est un vecteur propre de } f_a \text{ de valeur propre associée } a}$$

3. Montrons que :

$$f_a(\text{Vect}(e'_2, e'_3)) \subset \text{Vect}(e'_2, e'_3)$$

Pour cela montrons que l'image par  $f_a$  de toute combinaison linéaire de  $e'_2$  et  $e'_3$  s'exprime comme combinaison linéaire de  $e'_2$  et  $e'_3$ . Pour cela calculons  $f_a(\alpha e'_2 + \beta e'_3)$ . Par **linéarité** de  $f_a$ , nous avons :

$$\begin{aligned} f_a(\alpha e'_2 + \beta e'_3) &= \alpha f_a(e'_2) + \beta f_a(e'_3) \\ &= \alpha(f_a(e_1) + f_a(e_2) + f_a(e_3)) + \beta(2f_a(e_1) + f_a(e_2)) \\ &= \alpha((a+2)e_1 + e_2 - (2a+1)e_1 + e_3 + ae_1) \\ &\quad + \beta(2((a+2)e_1 + e_2) - (2a+1)e_1 + e_3) \\ &= \alpha(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(3e_1 + 2e_2 + e_3) \\ &= \alpha e'_2 + \beta(e_1 + e_2 + e_3) + \beta(2e_1 + e_2) \\ &= (\alpha + \beta)e'_2 + \beta e'_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Cette dernière égalité montre que l'image de tout vecteur de  $\text{Vect}(e'_2, e'_3)$  appartient encore à  $\text{Vect}(e'_2, e'_3)$ . Moralité :

$$\boxed{f_a(F) \subset F}$$

4. La détermination de l'expression de la matrice  $T_a$  de l'endomorphisme  $f_a$  dans la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  s'obtient en écrivant **en colonne** les coordonnées des vecteurs  $f_a(e'_1)$ ,  $f_a(e'_2)$  et  $f_a(e'_3)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Or nous savons que  $f_a(e'_1) = ae'_1$  et selon (1) que  $f_a(1e'_2 + 0e'_3) = (1+0)e'_2 + 0e'_3$  soit  $f_a(e'_2) = e'_2$  et enfin  $f_a(0e'_2 + 1e'_3) = (0+1)e'_2 + 1e'_3$  soit  $f_a(e'_3) = e'_2 + e'_3$  ce qui nous donne d'évidence :

$$\boxed{T_a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

5. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on définit la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{''}T_a^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{''}$$

- Comme  $T_a^0 = I_3$  la propriété  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Supposons que pour  $n$  fixé dans  $\mathbf{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie. Alors de la relation  $T_a^{n+1} = T_a^n T_a$  on déduit que :

$$T_a^{n+1} = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Ce raisonnement par récurrence standard prouve que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

### Partie III

1. Nous avons sans difficulté pour chaque entier naturel  $n$  :

$$\begin{bmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix}$$

L'examen des colonnes extrêmes montrent que l'on a bien :

$$\boxed{\begin{bmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}}$$

2. Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on définit la propriété

$$\mathcal{Q}(n) : \text{''} \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} \text{''}$$

- Comme  $T_2^0 = I_3$  alors  $P_2 T_2^0 P_2^{-1} = I_3$  et la propriété  $\mathcal{Q}(0)$  est vraie.
- Supposons que pour  $n$  fixé dans  $\mathbf{N}$ ,  $\mathcal{Q}(n)$  soit vraie. Alors de la relation (obtenue par la formule de changement de base appliquée à la matrice d'un endomorphisme) :

$$\begin{bmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = P_2 T_2 P_2^{-1} \begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{bmatrix} &= P_2 T_2 P_2^{-1} P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} \\ &= P_2 T_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} \\ &= P_2 T_2^{n+1} P_2^{-1} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et donc  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vraie.

Ce raisonnement par récurrence standard prouve que  $\mathcal{Q}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

3. Donner l'expression matricielle de la matrice inverse de  $P_2$  puis exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
Nous avons sans problème :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et un calcul simple nous donne :

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

et un autre calcul plus long cette fois nous informe que :

$$\begin{bmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \times 2^n - 5n - 12 \\ 6 \times 2^n - 5n - 7 \\ 3 \times 2^n - 5n - 2 \end{bmatrix}$$

Par identification :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = 3 \times 2^n - 5n - 2$$

4. La réécriture du terme général de la suite sous la forme  $u_n = 2^n \left( 3 - 5 \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$  nous montre (par croissance comparée) que :

$$\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est divergente}$$

## Exercice 2

### Partie I

1. Tout d'abord remarquons que  $\varphi(x)$  s'écrit pour chaque réel  $x$  strictement positif :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} (x \ln x - x \ln(x+1) + 1) \end{aligned}$$

avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+1) = 0$  alors il vient sans peine que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$$

Graphiquement parlant :

$$\text{La courbe représentative de } \varphi \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0$$

2. Encore un effort de réécriture de  $\varphi(x)$  pour constater pour chaque réel  $x$  strictement positif :

$$\varphi(x) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$$

Pour obtenir la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , posons  $t = \frac{1}{x}$  ce qui nous permettra d'effectuer un développement limité classique en 0. On a ainsi  $\varphi(x) = \psi(t)$  avec pour chaque réel  $t > 0$  :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= -\ln(1+t) + t \\ &= \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0}$$

Graphiquement parlant :

La courbe représentative de  $\varphi$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$

3. Tout d'abord  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$  en tant que composée et somme de telles fonctions avec après simplifications :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2(x+1)} < 0$$

La fonction  $\varphi$  est strictement monotone décroissante sur  $\mathbf{R}_+^*$

4. Dresser le tableau de variation de  $\varphi$  et y faire apparaître les limites de  $\varphi$  en  $0^+$  et  $+\infty$ .  
Le regroupement des résultats précédents nous donne le tableau de variations suivant :

$x$	$0$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	$-$
$\varphi$	$+\infty$	$0$

5. La fonction  $\varphi$  étant continue et strictement monotone décroissante sur ensemble de définition, elle y réalise donc une **bijection**. D'autre part  $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(1+3) + 3 = -2\ln 2 + 3 \simeq 1.6 > 1$  et  $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(1+2) + 2 \simeq 0.9 < 1$  et par stricte décroissance de  $\varphi$ , l'équation  $\varphi(x) = 1$  possède une unique solution notée  $\alpha$  avec :

$$\boxed{\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}}$$

## Partie II

1. La fonction  $f$  qui est bien définie sur  $\mathbf{R}$  est continue sur  $]\alpha, +\infty[$  en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur n'y est pas nul et sur  $]-\infty, \alpha]$  puisque  $f$  y coïncide avec la fonction nulle. D'autre part la question précédente nous fait constater que  $f$  est positive puisque là où elle n'est pas nulle  $f = -\varphi'$  avec  $\varphi' < 0$ . Il ne nous reste plus que l'étude de la convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  équivalente à celles de  $\int_{-\infty}^{\alpha} f$  et  $\int_{\alpha}^{+\infty} f$ . La convergence de la première ne pose aucun problème par coïncidence de  $f$  avec la fonction nulle sur l'intervalle fermé  $]-\infty, \alpha]$ . Quant à la seconde on pourrait s'aider du critère du Riemann (sans pour autant avoir la valeur de l'intégrale) mais comme  $\int^x f(t) dt = -\varphi(x) + c^{te}$  (où  $x \in ]-\infty, \alpha]$ ) profitons-en ! Pour  $A$  quelconque mais fixé dans  $]\alpha, +\infty[$  introduisons  $\int_{\alpha}^A f(t) dt$ , on obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^A \frac{1}{t^2(t+1)} dt &= [-\varphi(t)]_{\alpha}^A \\ &= -\varphi(A) + \varphi(\alpha) \\ &= 1 - \varphi(A) \end{aligned}$$

Selon la question 2 de la partie I,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \varphi(A) = 0$  ainsi  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^A \frac{1}{t^2(t+1)} dt = 1$  ce qui permet de conclure par la finitude de la limite que l'intégrale  $\int_{\alpha}^{+\infty} f$  converge. En conclusion  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  converge égale par la **relation de Chasles** à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{+\infty} f = 1$$

La fonction  $f$  est bien une densité de probabilité

2. La variable  $X$  admet une espérance si, et seulement si l'intégrale  $\int_{\alpha}^{+\infty} xf(x) dx$  converge par définition de  $f$  qui coïncide avec la fonction nulle sur l'intervalle  $]-\infty, \alpha]$  (cela entraîne que  $X$  prend presque sûrement ses valeurs dans l'intervalle ouvert  $]\alpha, +\infty[$ ). L'intégrale présente **deux imprégnés** en  $\alpha$  et en  $+\infty$  puisque  $f$  est continue sur  $]\alpha, +\infty[$ . Le problème de convergence en  $\alpha$  est vite réglé puisque  $f$  y est prolongeable par continuité. Maintenant en  $+\infty$ ,  $\frac{t}{t^2(t+1)} \sim \frac{1}{t^2}$  et comme  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  admet une intégrale convergente au voisinage de  $+\infty$ , le critère d'équivalence appliqué aux fonctions positives nous informe que  $x \mapsto xf(x)$  admet à son tour une intégrale convergente au voisinage de  $+\infty$ . En conclusion la convergence des intégrales  $\int_{\alpha}^B xf(x) dx$  et  $\int_B^{+\infty} xf(x) dx$  (où  $B > \alpha$ ) équivaut à celle de  $\int_{\alpha}^{+\infty} xf(x) dx$  et :

La variable  $X$  admet une espérance  $\mathbf{E}(X)$

3. Soit  $x > \alpha$ ,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \frac{1}{x^2} &= -\frac{1}{x^2(x+1)} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \\ &= \frac{x}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\forall x > \alpha, \quad xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}$$

On en déduit le calcul de primitive sur  $]\alpha, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \int^x tf(t) dt &= \int^x \left( \varphi'(t) + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \varphi(x) - \frac{1}{x} + c^{te} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \int_{\alpha}^{+\infty} xf(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx + \int_{\beta}^{+\infty} xf(x) dx \\ &= \lim_{A \rightarrow \alpha} \left( \varphi(\beta) - \frac{1}{\beta} - \varphi(A) + \frac{1}{A} \right) + \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \varphi(B) - \frac{1}{B} - \varphi(\beta) + \frac{1}{\beta} \right) \\ &= \lim_{A \rightarrow \alpha} \left( -\varphi(A) + \frac{1}{A} \right) + \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \varphi(B) - \frac{1}{B} \right) \\ &= -\varphi(\alpha) + \frac{1}{\alpha} + 0 \\ &= -1 + \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

La décroissance de la fonction  $t \mapsto \frac{1-t}{t}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  nous entraîne à écrire que :

$$\frac{1 - 1/2}{1/2} < \mathbf{E}(X) < \frac{1 - 1/3}{1/3}$$

soit encore :

$$1 < \mathbf{E}(X) < 2$$

4. La variable  $X$  admet une variance si, et seulement si  $X$  admet un **moment d'ordre deux** autrement si et seulement si l'intégrale  $\int_{\alpha}^{+\infty} x^2 f(x) dx$  converge. Or quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $x^2 f(x) \sim \frac{1}{x}$  et l'on sait par l'un des rares élèves de Gauss<sup>1</sup> que  $\int_{\gamma>0}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  diverge. Ainsi :

La variable aléatoire réelle  $X$  n'admet pas de variance

## Exercice 3

### Partie I

1. Au lieu d'effectuer les calculs directement nous ferons plutôt le constat que la famille événementielle  $(E_1, E_2, E_3)$  constitue un **système complet d'événements**, donc :

$$\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_3) = 1 \tag{2}$$

avec d'évidence :

$$\mathbf{P}(E_1) = \mathbf{P}(E_3) \tag{3}$$

par symétrie des rôles joués par les résultats  $D_1$  et  $D_2$ . Commençons par le calcul de  $\mathbf{P}(E_2)$  égale à  $\mathbf{P}([D_1 = D_2])$  où  $D_1$  et  $D_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'ensemble  $\{1, \dots, 6\}$ . Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E_2) &= \sum_{k=1}^6 \mathbf{P}([D_1 = D_2] \cap [D_1 = k]) \\ &\text{par la formule des probabilités totales} \\ &\text{associée au système complet } ([D_1 = k])_{k \in [1,6]} \\ &= \sum_{k=1}^6 \mathbf{P}([D_1 = k] \cap [D_2 = k]) \\ &= \sum_{k=1}^6 \mathbf{P}([D_1 = k]) \mathbf{P}([D_2 = k]) \\ &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{36} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(E_2) = \frac{1}{6}$$

La combinaison des relations (2) et (3) nous donnent facilement :

$$2\mathbf{P}(E_1) + \frac{1}{6} = 1$$

soit encore :

$$\mathbf{P}(E_1) = \mathbf{P}(E_3) = \frac{5}{12}$$

2. Soit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  nous avons  $X_i(\Omega) = \{0, 1, 2\}$  avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_i = 0]) &= \mathbf{P}(E_1) = \frac{5}{12} \\ \mathbf{P}([X_i = 1]) &= \mathbf{P}(E_3) = \frac{5}{12} \\ \mathbf{P}([X_i = 2]) &= \mathbf{P}(E_2) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca.

La **finitude** des variables  $X_i$  induit qu'elles admettent des moments de **tout ordre** donc en particulier une espérance et une variance respectivement égale à :

$$\mathbf{E}(X_i) = \frac{5}{12} + \frac{2}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{E}(X_i^2) = \frac{5}{12} + \frac{4}{6} = \frac{13}{12}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le célèbre résultat de Huygens pour conclure que :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X_i) &= \mathbf{E}(X_i^2) - (\mathbf{E}(X_i))^2 \\ &= \frac{13}{12} - \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}(X_i) = \frac{25}{48}$$

3. Lorsque l'indice  $i$  vaut 1 les deux variables  $X_i$  et  $Y_i$  se confondent, à savoir que  $X_1 = Y_1$  ainsi :

$$\text{La loi de } Y_1 \text{ est celle de } X_1$$

4. Pour obtenir la loi de  $Y_2$  signalons que :

$$Y_2 = X_1 + X_2$$

dans ce cas  $Y_2(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  avec :

- $\mathbf{P}(Y_2 = 0) = \mathbf{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (\mathbf{P}([X_1 = 0]))^2 = \frac{25}{144}$  puisque les deux variables  $X_1$  et  $X_2$  en jeu sont iid.
- De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_2 = 1) &= \mathbf{P}([X_1 = 0])\mathbf{P}([X_2 = 1]) + \mathbf{P}([X_1 = 1])\mathbf{P}([X_2 = 0]) \\ &= 2\mathbf{P}([X_1 = 0])\mathbf{P}([X_2 = 1]) \\ &= 2\left(\frac{25}{144}\right) \\ &= \frac{25}{72} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_2 = 2) &= \mathbf{P}([X_1 = 0])\mathbf{P}([X_2 = 2]) + \mathbf{P}([X_1 = 1])\mathbf{P}([X_2 = 1]) + \mathbf{P}([X_1 = 2])\mathbf{P}([X_2 = 0]) \\ &= 2\mathbf{P}([X_1 = 0])\mathbf{P}([X_2 = 2]) + (\mathbf{P}([X_1 = 1]))^2 \\ &= 2\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{25}{144} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_2 = 3) &= \mathbf{P}([X_1 = 1])\mathbf{P}([X_2 = 2]) + \mathbf{P}([X_1 = 2])\mathbf{P}([X_2 = 1]) \\ &= 2\mathbf{P}([X_1 = 1])\mathbf{P}([X_2 = 2]) \\ &= 2\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{5}{36} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Y_2 = 4]) &= \mathbf{P}([X_1 = 2]) \mathbf{P}([X_2 = 2]) \\
 &= (\mathbf{P}([X_1 = 2]))^2 \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\
 &= \boxed{\frac{1}{36}}
 \end{aligned}$$

On laissera au lecteur le soin de vérifier que la somme de ces quatre probabilités est bien égale à 1.

5. (a) Comme  $Y_3 = Y_2 + X_3$  (où les deux variables en jeu sont clairement **indépendantes** par le **lemme des caolitions**) on en déduit que :

$$\boxed{Y_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$$

- (b) Avant de construire le tableau de la loi conjointe du couple  $(Y_2, Y_3)$  montrons comment s'effectue le calcul de  $\mathbf{P}([Y_2 = i] \cap [Y_3 = j])$  lorsque le couple  $(i, j)$  parcourt le produit cartésien  $\llbracket 0, 4 \rrbracket \times \llbracket 0, 6 \rrbracket$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \times \llbracket 0, 6 \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Y_2 = i] \cap [Y_3 = j]) &= \mathbf{P}([Y_2 = i] \cap [Y_2 + X_3 = j]) \\
 &= \mathbf{P}([Y_2 = i] \cap [X_3 = j - i]) \\
 &= \mathbf{P}([Y_2 = i]) \mathbf{P}([X_3 = j - i])
 \end{aligned}$$

par indépendance des variables en jeu

Cette probabilité est nulle lorsque l'écart  $j - i \notin \{0, 1, 2\}$ . Voici donc le fameux tableau de contingence à deux entrées :

$Y_2 \downarrow \overrightarrow{Y_3}$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{25 \cdot 5}{144 \cdot 12} = \frac{125}{1728}$	$\frac{25 \cdot 5}{144 \cdot 12} = \frac{125}{1728}$	$\frac{25 \cdot 1}{144 \cdot 6} = \frac{25}{864}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{25 \cdot 5}{72 \cdot 12} = \frac{125}{864}$	$\frac{25 \cdot 5}{72 \cdot 12} = \frac{125}{864}$	$\frac{25 \cdot 1}{72 \cdot 6} = \frac{25}{432}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{5 \cdot 5}{16 \cdot 12} = \frac{25}{192}$	$\frac{5 \cdot 5}{16 \cdot 12} = \frac{25}{192}$	$\frac{5 \cdot 1}{16 \cdot 6} = \frac{5}{96}$	0	0
3	0	0	0	$\frac{5 \cdot 5}{36 \cdot 12} = \frac{25}{432}$	$\frac{5 \cdot 5}{36 \cdot 12} = \frac{25}{432}$	$\frac{5 \cdot 1}{36 \cdot 6} = \frac{5}{216}$	0
4	0	0	0	0	$\frac{1 \cdot 5}{36 \cdot 12} = \frac{5}{432}$	$\frac{1 \cdot 5}{36 \cdot 12} = \frac{5}{432}$	$\frac{1 \cdot 1}{36 \cdot 6} = \frac{1}{216}$
$\mathbf{P}([Y_3 = j])$	$\frac{125}{1728}$	$\frac{125}{576}$	$\frac{175}{576}$	$\frac{425}{1728}$	$\frac{35}{288}$	$\frac{5}{144}$	$\frac{1}{216}$

- (c) Voir le tableau précédent.

6. (a) Comme la variable aléatoire  $Y_n$  représente la **somme** des points marqués à l'issue de  $n$  parties, il vient :

$$\boxed{Y_n = \sum_{k=1}^n X_k}$$

Cette relation implique que  $Y_n$  admet une espérance et une variance en tant que telles variables (**iid**) avec par **linéarité de l'espérance** :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(Y_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k) \\
 &= n\mathbf{E}(X_1)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_n) = \frac{3n}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(Y_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) \\
 &= n\mathbf{V}(X_1)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{V}(Y_n) = \frac{25n}{48}}$$

(b) Attention dans cette question à ne pas confondre le nombre moyen de parties avec le nombre moyen de points, donc à mon humble avis chercher  $n$  tel que  $\frac{3n}{4} \geq 10$  (soit  $n \geq 14$ ) serait une erreur, ou bien je n'ai rien compris à l'intitulé de la question ! Introduisons alors  $N$  la variable associée au nombre de parties pour obtenir plus de 10 points. Déterminons sa loi puis son espérance pour répondre à la question. Tout d'abord  $N(\Omega) \subset \mathbf{N}^*$  d'ailleurs nous pouvons préciser que le nombre minimum de partie est de 5 en imaginant le joueur récupérer 2 points lors des cinq premières parties. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([N = n]) &= \mathbf{P}([Y_{n-1} < 10] \cap [Y_n \geq 10]) \\ &= \mathbf{P}([Y_{n-1} < 10]) - \mathbf{P}([Y_{n-1} < 10] \cap [Y_n < 10]) \\ &= \mathbf{P}([Y_{n-1} < 10]) - \mathbf{P}([Y_n < 10]) \\ &\quad \text{puisque } [Y_n < 10] \subset [Y_{n-1} < 10] \\ &= \mathbf{P}([Y_{n-1} \leq 9]) - \mathbf{P}([Y_n \leq 9]) \\ &= F_{Y_{n-1}}(9) - F_{Y_n}(9) \end{aligned}$$

Par suite sous réserve de convergence :

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{n \in N(\Omega)} n (F_{Y_{n-1}}(9) - F_{Y_n}(9))$$

Faisons un petit arrêt à ce niveau-là en posant pour tout  $n$  de  $N(\Omega) \subset \mathbf{N}^*$ ,  $a_n = F_{Y_n}(9)$  et supposons que la série de terme général  $na_n$ .

Nous allons utiliser le **théorème comparaison des séries à termes positifs** en écrivant que :

- les séries de terme général  $na_n$  et  $a_n$  sont à termes positifs,
- à partir du rang  $n = 1$  :  $a_n \leq na_n$
- la série de terme général  $na_n$  converge par hypothèse,

donc la série de terme général  $a_n$  converge. C'est encore parti pour du **télescopage** ... Soit  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à 1,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N n(a_{n-1} - a_n) \\ &= \sum_{n=1}^N na_{n-1} - \sum_{n=1}^N na_n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)a_n - \sum_{n=1}^N na_n \\ &\quad \text{par décalage d'indice dans la somme de gauche} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} na_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n - \sum_{n=1}^N na_n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n - Na_N \\ &\quad \text{par télescopage} \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse,  $\sum_{n \geq 1} na_n$  converge alors  $\lim_{N \rightarrow \infty} Na_N = 0$  et nous venons de montrer que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge, en conséquence :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n - \lim_{N \rightarrow \infty} Na_N = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Conclusion :

La série  $\sum_{n \geq 1} n(a_{n-1} - a_n)$  converge et a pour somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_{n-1} - a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  (4)

et en revenant à notre espérance :

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{n \in \mathcal{N}(\Omega)} F_{Y_n} \quad (9)$$

Vous allez me dire c'est du "délire", d'ailleurs j'arrête là ! A mon avis la question à reformuler devait être : "Quel ne nombre moyen de parties que doit effectuer le joueur pour dépasser 10 points", auquel cas :

$$n \geq 14$$

## Partie II

1. (a) La variable  $T_1$  correspond au **temps d'attente** de la partie amenant pour la première fois un nombre de points non nul. Ainsi nous pouvons directement assurer que  $T_1$  suit une **loi géométrique** de paramètre  $\mathbf{P}([X_i \neq 0])$ . Par conséquent :

$$T_1(\Omega) = \mathbf{N}^*$$

et pour chaque entier  $k$  non nul :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T_1 = k]) &= \mathbf{P}([X_1 = 0])^{k-1} \mathbf{P}([X_1 \neq 0]) \\ &= \mathbf{P}([X_1 = 0])^{k-1} (\mathbf{P}([X_1 = 1]) + \mathbf{P}([X_1 = 2])) \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}([T_1 = k]) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \left(\frac{7}{12}\right)$$

- (b) C'est une **question de cours**. Sans commentaire :

$$\mathbf{E}(T_1) = \frac{12}{7} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(T_1) = \frac{\frac{5}{12}}{\left(\frac{7}{12}\right)^2} = \frac{60}{49}$$

2. (a) Comme  $2 \in X_1(\Omega)$ ,

$$T_2(\Omega) = \mathbf{N}^*$$

- (b) Nous avons :

$$\mathbf{P}([T_2 = 1]) = \mathbf{P}([X_1 = 2]) = \frac{1}{6}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T_2 = 2]) &= \mathbf{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 2]) + \mathbf{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 \geq 1]) \\ &= \mathbf{P}([X_1 = 0]) \mathbf{P}([X_2 = 2]) + \mathbf{P}([X_1 = 1]) \mathbf{P}([X_2 \geq 1]) \\ &= \mathbf{P}([X_1 = 0]) \mathbf{P}([X_2 = 2]) + \mathbf{P}([X_1 = 1]) (1 - \mathbf{P}([X_2 = 0])) \\ &= \frac{5}{12} \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \left(1 - \frac{5}{12}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}([T_2 = 2]) = \frac{5}{16}$$

- (c) Soit  $k \geq 3$ , l'événement  $[T_2 = k]$  est réalisé si, et seulement si :

- soit les  $k - 1$  premières parties n'amènent aucun point et la  $k^{\text{ème}}$  deux points ;
- soit les  $k$  premières parties n'amènent qu'un seul point (il y a  $k - 1$  possibilité de l'obtenir) et la  $k^{\text{ème}}$  au moins un point.

Ce qui se traduit formellement par :

$$[T_2 = k] = \left( \bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0] \cap [X_k = 2] \right) \uplus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} [X_i = 1] \cap \left( \bigcap_{\substack{j \in [1, k-1] \\ j \neq i}} [X_j = 0] \right) \cap [X_k \geq 1] \right)$$

où le symbole  $\uplus$  désigne une union disjointe. Par  $\sigma$ -additivité de  $\mathbf{P}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T_2 = k]) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0] \cap [X_k = 2]\right) + \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} [X_i = 1] \cap \left(\bigcap_{\substack{j \in [1, k-1] \\ j \neq i}} [X_j = 0]\right) \cap [X_k \geq 1]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([X_i = 0]) \mathbf{P}([X_k = 2]) + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([X_i = 1]) \prod_{\substack{j \in [1, k-1] \\ j \neq i}} \mathbf{P}([X_j = 0]) \mathbf{P}([X_k \geq 1]) \\ &\quad \text{par indépendance des variables } X_i \\ &= \frac{1}{6} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{5}{12} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{5}{12} \prod_{\substack{j \in [1, k-1] \\ j \neq i}} \frac{5}{12} \times \left(1 - \frac{5}{12}\right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{5}{12} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$\forall k \geq 3, \quad \mathbf{P}([T_2 = k]) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2}$

(5)

(d) Lorsque  $k = 1$  il vient

$$\frac{1}{6} \left(\frac{5}{12}\right)^0 + 0 \left(\frac{5}{12}\right)^0 \frac{7}{12} = \frac{1}{6}$$

et pour  $k = 2$  :

$$\frac{1}{6} \left(\frac{5}{12}\right)^1 + \left(\frac{5}{12}\right)^1 \frac{7}{12} = \frac{5}{16}$$

Conclusion :

Le résultat (5) est valable pour  $k = 1$  et  $k = 2$

(e) Rappelons qu'il est absolument **inutile** d'étudier la convergence de la série, sachant  $T_2$  est une variable aléatoire et donc les événements  $[T_2 = k]$  sont deux à deux disjoints. Donc faisons confiance à la  $\sigma$ -additivité de  $\mathbf{P}$  en ce qui concerne la **convergence** de la série ! Ceci étant précisé passons au calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T_2 = k]) &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\ &\quad \text{séparation légitime puisque les séries en jeu sont convergentes} \\ &\quad \text{(série géo et série dérivée)} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \frac{5}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{1 - 5/12} + \frac{7}{12} \frac{5}{12} \frac{1}{(1 - 5/12)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}([T_2 = k]) = 1$

(f) Le résultat précédent nous amène à conclure que l'événement  $[T_2 \geq 1]$  est **quasi-certain** donc :

L'événement "le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2" est quasi-impossible

(g) La variable  $T_2$  admet une espérance si, et seulement si la série de terme général positif  $k\mathbf{P}([T_2 = k]) = \frac{1}{6}k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12}k(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}$  est convergente. Ceci est parfaitement avéré par le fait que le terme général s'exprime comme **combinaison linéaire** de séries dérivées de séries géométriques convergentes car de même raison  $\frac{5}{12}$  strictement inférieure à 1 en valeur absolue. Ainsi  $T_2$  admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T_2) &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12} \frac{5}{12} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{6} \frac{1}{(1-5/12)^2} + \frac{7}{12} \frac{5}{12} \frac{2!}{(1-5/12)^3} \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(T_2) = \frac{144}{49}$$

